2. ЕЛЕМЕНТАРНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

2.1. МАТЕМАТИЧКИ РЕБУСИ

Најједноставније Диофантове једначине су математички ребуси. Метод разликовања случајева код ових проблема се показује плодоносним, јер је раздвајање случајева доста олакшано, пошто су цифре елементи скупа $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Основни принцип на коме почивају многе идеје и методе које се користе при решавању Диофантових једначина је садржан у једноставној чињеници да све оно што важи за једну страну једнакости, због особине рефлексивности једнакости ($a = a$), важи у идентичној форми и за другу страну једнакости. Ако је лева страна једнакости увек паран број, онда то мора бити и десна; ако је лева страна потпун квадрат, онда је то и десна; ако је лева увек мања од неке вредности, онда је то и десна ...

<u>ПРИМЕР 1.</u> *Дешифровати множење* $* 4 * \cdot 15 = 3 * 9 *$.

РЕШЕЊЕ: Лева страна једнакости је дељива са 15, што значи да је и допроизвод дељив са 15, дакле и са 3 и са 5, па се могу извући следећи закључци: a) збир цифара броја 3 * 9 * је дељив са 3; b) последња цифра броја 3 * 9 * је 0 или 5; c) друга цифра првог чиниоца је 4. На основу ових закључака разликују се два случаја:

1) Ако је последња цифра производа, тј. друга звездица једнака 0, онда је збир цифара 12 + *, па због услова дељивости збира цифара са 3, прва звездица може бити 0, 3, 6 или 9, па се ради о производу 3090, 3390, 3690 или 3990.

Како добијени бројеви при дељењу са 15 дају редом количнике 206, 226, 246 или 266, јасно је да због услова c) постоји само једно решење: $246 \cdot 15 = 3690$.

2) Ако је последња цифра производа 5, онда је збир цифара 17 + * па је због услова b) друга звездица једнака 1, 4 или 7, односно ради се о производима 3195, 3495 или 3795. Ови бројеви при дељењу са 15 дају количнике 213, 233 или 253, па ниједан не задовољава услов c), јер му друга цифра није 4. Δ

ПРИМЕР 2. Одредити цифре a, b и c, тако да важи једнакост: $\overline{aa} + \overline{bb} = \left(\overline{cc}\right)^2$.

РЕШЕЊЕ: У овом примеру уместо звездица су дата слова, што упућује да се проблем прво мора са језика ребуса превести на језик једначина, а тек потом решавати. Дата једнакост се лако преводи у облик $11a + 11b = (11c)^2 = 121c^2$. Очигледно су и лева и десна страна једнакости дељиви са 11, па се после дељења са 11 добија једначина: $a + b = 11c^2$. Како су a и b цифре, њихов збир може бити највише $9 + 9 = 18$, па је $11c^2 \le 18$, што значи да је $11c^2 = 11$, па је $c = 1$. Тада је $a + b = 11$, па задатак има више решења: $22 + 99 = 33 + 88 = \ldots = 66 + 55 = 77 + 44 = 88 + 33 = 99 + 22 = 121 = 11^2$. Δ

ПРИМЕР 3. Одредити цифре a, b и c и природан број n, тако да је $a + \overline{bb} + \overline{ccc} = n^4$. *Колико има решења?*

РЕШЕЊЕ: Збир једног једноцифреног, једног двоцифреног и једног троцифреног броја $a + \overline{bb} + \overline{ccc}$ увек је већи од $1 + 11 + 111 = 122$, а мањи од $9 + 99 + 999 = 1107$. Дакле, важи неједнакост $121 < 122 \le n^4 \le 1107 < 1225$.

Значи да је $11 < n^2 < 35$, па је $3 < n < 6$, односно $n = 4$ или $n = 5$. Разликују се два случаја:

1) Ако је $n = 4$, онда је $n^4 = 256 = 222 + 33 + 1$;

2) Ако је $n = 5$, онда је $n^4 = 625 = 555 + 66 + 4$. Δ

Детаљније о математичким ребусима говоре проблеми који се дају за самосталан рад:

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

12. Уместо звездица написати одговарајуће цифре тако да одузимање * * * * * - * * * * = * * * буде тачно, ако се умањеник, умањилац и разлика читају с лева на десно једнако као и с десна на лево.

13. Да ли ребус * * * + * * * = * * * има решење ако се свака од цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 може употребити само једном?

14. Да ли ребус * * * * - * * * = * * * има решење ако се свака од цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 може употребити само једном?

15. Ако је x једноцифрен, а y двоцифрен природни број дешифровати започето множење: $x \cdot y \cdot 45 = 22**$. Колико има решења?

16. У броју * * * * * * * * * * уместо звездица распоредити цифре 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 тако да се свака цифра употреби само једном и да добијени број буде дељив са 99. Који је најмањи, а који највећи такав број?

17. Одредити све двоцифрене природне бројеве x и y тако да је испуњена једнакост $x \cdot y \cdot 22 = 3 * 4 *$.

18. Одредити цифре a и b и природан број n тако да је $\dfrac{\overline{199a1b}}{12} = n$.

19. Дешифровати квадрирање: $(***)^2 = *00**$.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

20. Дат је разломак $\dfrac{A \cdot R \cdot H \cdot I \cdot M \cdot E \cdot D}{E \cdot U \cdot K \cdot L \cdot I \cdot D}$. Израчунати вредност разломка ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре. (Србија 1990.)

21. Одредити непознате цифре a и b тако да је $3 \cdot \overline{3a} = 2 \cdot \overline{5b}$. Колико има решења? (Србија 1991.)

22. Заменити звездице одговарајућим цифрама и израчунати природан број n, ако је $*71* : 36 = n$. (Србија 1991.)

23. Дешифровати множење: $a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb}$. (Србија 1991.)

24. Разломци $\dfrac{3*5*}{36}$ и $\dfrac{4*7*}{45}$ су природни бројеви. Упоредити их по величини. (Србија 1995.)

25. Дешифровати множење: $\overline{abcd} \cdot 9 = \overline{dcba}$. (Србија 1995.)

26. Дешифровати квадрирање: $(5c + 1)^2 = \overline{abcd}$ ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре. (Србија 1996.)

27. Дешифровати множење: $*2* \cdot 45 = (**)^2$. (Србија 1998.)

28. Дешифровати сабирање $A + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 2002$.(Србија 2002).

29. У једнакости $7 * 8 = * 9 \cdot 8 + 7 *$, заменити звездице цифрама тако да једнакост буде тачна (Србија 2005).

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

30. Одредити међусобно различите цифре a, b и c и природан број n, тако да важи једнакост $a + \overline{ab} + \overline{abc} = n^3$. Колико има решења?

31. Који троцифрени број има особину да се 6 пута смањи ако му се избрише цифра десетица?

32. Дат је број $\overline{aaa\ldots aaa} + \overline{bbb\ldots bbb}$ у коме је 2000 цифара a и 1000 цифара b (a и b су цифре различите од нуле). Одредити a и b тако да дати број буде дељив са 36.

2.2. ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ПРОСТИМ БРОЈЕВИМА

Код Диофантових једначина које се односе на просте бројеве користе се идеје које су добро познате када су прости бројеви у питању. Свакако најексплоатисаније од тих идеја су оне које почивају на следећим једноставним тврђењима (које наводимо без доказа):

- Број 2 је једини паран прост број ;
- Сви прости бројеви већи од 2 су непарни ;
- Број 3 је једини прост број који је дељив са 3 ;
- Сви прости бројеви већи од 2 су облика 4к–1 или 4к+1
- Сви прости бројеви облика 4к – 1 или 4к + 1 нису прости ;
- Сви прости бројеви већи од 3 су облика 6к–1 или 6к +1
- Сви бројеви облика 6к – 1 или 6к + 1 нису прости ;
- Сви прости бројеви већи од 5 завршавају се цифрама 1,3,7, или 9.

Са неколико примера илустроваће се како се наведена тврђења користе у решавању Диофантових једначина са простим бројевима.

<u>*ПРИМЕР 4:*</u> *Одредити све уређене парове (p, q) простих бројева p и q тако да је a) 2p + 3q = 200 ; b) 2p + 3q = 201.*

РЕШЕЊЕ: a) Ако је 2p + 3q = 200, онда је 3q = 200 – 2p, па је с десне стране једнакости паран број, што значи да и 3q мора бити паран број.

Дакле, $q = 2$, а $2p = 200 - 6 = 194$. Како је $p = 97$ прост број, то је $p = 97$, $q = 2$ једино решење.

b) Ако је $2p + 3q = 201$, онда је $2p = 201 - 3q = 3(67 - q)$. Како је десна страна једнакости дељива са 3 то мора бити и лева. Број $2p$ је дељив са 3 само ако је $p = 3$, јер је $p = 3$ једини прост број дељив са 3. Тада је $2 = 67 - q$, а $q = 65$ што није прост број. Закључак је да ова једначина нема решења у скупу простих бројева. Δ

<u>ПРИМЕР 5:</u> Колико има природних бројева n таквих да важи једнакост $5p + 13q = 65n$, ако су p и q прости бројеви?

РЕШЕЊЕ: Ако је $5p + 13q = 65n$, онда је $5p = 13(5n - q)$, па $5p$ мора бити дељиво са 13, што значи да је $p = 13$.

Слично је и $13q = 5(13n - p)$, па је $13q$ дељиво са 5, односно $q = 5$. Дакле $65n = 5\cdot 13 + 13\cdot 5 = 130$, па је $n = 2$, једини број који испуњава горњи услов. Δ

<u>ПРИМЕР 6:</u> Постоје ли прости бројеви p и q такви да је $7p + 11q = 400$?

РЕШЕЊЕ: Како је 400 паран број то су $7p$ и $11q$ или оба парна или оба непарна. Ако су оба парна онда је $7p + 11q = 24 + 22 = 46$, што је много мање од 400. Ако су p и q непарни: за $p = 3$, q није цео број, а за $q = 3$, p није цео број.

Ако су p и q прости бројеви већи од 3, онда је $p = 6к \pm 1$ и $q = 6m \pm 1$ ($k \in N$, $m \in N$).

Разматрањем све четири комбинације добијају се једначине: $6(7k + 11m) = 418$; $6(7k + 11m) = 404$; $6(7k + 11m) = 396$; $6(7k + 11m) = 382$. Од свих добијених бројева једино је 396 дељиво са 6, па из $6(7k + 11m) = 396$, следи да је $7k + 11m = 66$. Како су $11m$ и 66 дељиви са 11, то мора бити и $7к$. Дакле $к = 11$, што није могуће, јер би тада m било -1, што није прост број. Δ

<u>ПРИМЕР 7:</u> Одредити све просте бројеве p, q и r, такве да важи једнакост $p + pq + pq\,r = 38$?

РЕШЕЊЕ: Ако је $p + pq + pq\,r = 38$, онда је $p(1 + q + q\,r) = 38 = 2\cdot 19$. Јасно је да је израз у загради већи од 2, па је због тога $p = 2$. Тада је $q(1 + r) = 18$. Како је $1 + r$ веће од 2, то је $q = 3$, а $r + 1 = 6$, па је $r = 5$. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

33. Ако су x и y природни, а p прост број одредити сва решења једначине: a) $x \cdot y = 17$; b) $x \cdot y = p$?

34. Одредити решења једначине: a) $x \cdot y = 49$; b) $x \cdot y = p^2$, ако су x и y природни, а p прост број?

35. Колико решења има једначина: a) $x \cdot y = 64$; b) $x \cdot y = p^n$, ако су x, y и n природни, а p прост број?

36. Колико решења у скупу простих бројева има једначина $p + q = 30$?

37. Постоје ли прости бројеви p и q такви да важи једнакост: $3p + 5q = 67$?

38. Одредити сва решења једначине $5p - 7q = 1$, ако су p и q прости бројеви?

39. Колико решења у скупу простих бројева има једначина $17p + 11q = 155$.

40. Одредити све просте бројеве p и q тако да је испуњена једнакост $\frac{p}{2} + \frac{q}{3} = 2$.

41. Доказати да једначина $\frac{p}{4} + \frac{q}{15} = n$ нема решења, ако су p и q прости, а n природан број.

42. Колико решења има једначина $p^3 + 3^p = q$, ако су p и q прости бројеви.

43. Одредити решења једначине $p^q + q^p = 57$, ако су p и q прости бројеви?

44. Колико решења има једначина $x \cdot y \cdot z = p$, ако су x, y и z природни, а p прост број?

45. Одредити сва решења следећих једначина: a) $x \cdot y \cdot z = 9$; b) $x \cdot y \cdot z = p^2$ ако су x, y и z природни, а p прост број?

46. Постоје ли прости бројеви p, q и r, такви да је $p + q + r = 100$?

47. Одредити просте бројеви p, q и r, ако је $p + 2q + 3r = 37$?

48. Одредити све просте бројеве p, q и r тако да задовољавају једначину $pq + r = 23$.

49. Колико решења има једначина $pq + qr = 40$, ако су p, q и r прости бројеви?

50. Да ли једначина $pq + qr + rp = 2006$ има решења, ако су p, q и r прости бројеви?

51. Које особине има природан броја к, ако једначина $pq + qr + rp = 2к$ има решење?

52. Одредити све просте бројеве p, q и r који испуњавају једнакост је $p^q + q^r + r^p = 166$.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

53. Нека су p, q и r прости бројеви и a, b и c такви природни бројеви да важи $p = a^b + c$, $q = b^c + a$ и $r = c^a + b$. Доказати да су у том случају два од бројева p, q и r међусобно једнаки. (Србија 2005.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

54. Колико решења има једначина $3p + 5q = 100$, ако су p и q прости бројеви?

55. За које вредности природног броја n једначина $\frac{p}{2} + \frac{q}{3} = n$ има решења, ако су p и q прости бројеви ?

56. Одредити све просте бројеве p и q , тако да је $p^2 + 2^p = q$.

57. Очигледно је: $2 + 7 = 3^2$, $3 + 13 = 4^2$, $2 + 23 = 5^2$, $5 + 31 = 6^2$ ... Да ли се квадрат сваког природног броја већег од 3 може приказати као збир два проста броја?

58. Познато је да је: $2 + 2 = 4$, $3 + 3 = 6$, $3 + 5 = 8$, $2 + 7 = 9$, $3 + 7 = 10$, $5 + 7 = 12$, $7 + 7 = 14$, $2 + 13 = 15$, $3 + 13 = 5 + 11 = 16$, ... Да ли је се сваки сложен природан број може приказати као збир два проста броја?

59. Колико решења има једначина $x \cdot y \cdot z = p^9$, ако су x, y и z цели, к природни, а p прост број и ако је $x < y < z$.

2.3. ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ЦЕЛИМ БРОЈЕВИМА

Примери који следе су уводни и њима се илуструју најједноставније идеје које се користе у решавању разних Диофантових једначина. Све наведене идеје спадају у елементарне и представљају добру припрему за студиознији приступ проблематици Диофантових једначина.

<u>ПРИМЕР 8:</u> Одредити све уређене парове (x, y) целих бројеве x и y таквих да је 5x = 17y.

РЕШЕЊЕ: Ако је y цео број онда је десна страна једначине дељива са 5, па y мора бити дељиво са 5, тј. $y = 5к$ ($к \in Z$). Тада је $5x = 17 \cdot 5к$, па је $x = 17к$.

Уређени пар (17к, 5к) где је к било који цео број доказује да дата једначина има бесконачно много решења, јер за свако од бесконачно много целобројних к, се може добити одговарајуће x и y. Уређени пар (x, y) = (17к, 5к) представља ОПШТЕ РЕШЕЊЕ дате једначине. Δ

Појам општег решења Диофантове једначине је један од најважнијих појмова, а представља формулу која описује сва решења дате једначине. Опште решење је најчешће параметарског типа, тј. показује како се у зависности од вредности неког параметра мењају решења дате једначине. Опште решење може бити и функција два, па и више параметара. [6]

<u>ПРИМЕР 9:</u> Дата је једначина $x^2 + 3y = 24$. Колико решења има дата једначина у скупу природних, а колико у скупу целих бројева?

РЕШЕЊЕ: Из једначине следи да је $x^2 = 24 - 3y = 3(8 - y)$. Како је десна страна увек дељива са 3 то мора бити и лева страна, што значи да је x^2, а самим тим и x дељив са 3.

С обзиром да је $x^2 < 24$, то је $x < 4$, па је $x = 3$ $y = 5$ једино решење дате једначине у скупу природних бројева.

Ако је $x = 3к$ ($к \in Z$), онда је $x^2 = 9к^2$, па је $x^2 + 3y = 9к^2 + 3y = 24$ или $3y = 24 - 9к^2$, па је $y = 8 - 3к^2$. Дакле у скупу целих бројева једначина има бесконачно много решења, а опште решење дате једначине у скупу целих бројева је : $x = 3к$, $y = 8 - 3к^2$ ($к \in Z$). Δ[7]

<u>ПРИМЕР 10:</u> Да ли једначина $x^2 + \frac{6}{y} = 10$ има коначно или бесконачно много решења у скупу целих бројева?

РЕШЕЊЕ: Из једначине следи да је $10 - x^2 = \frac{6}{y}$. Како је лева страна једнакости увек цео број, то мора бити и лева.

[6] Опште решење једначине је појам о коме је већ било говора у примеру 8. претходног поглавља

[7] Када се говори о решењу неке једначине у скупу целих бројева, подразумева се да је то решење уређени пар, уређена тројка, ..., уређена n-торка целих бројева која задовољава дату једначину

То значи да је y целобројни делилац броја 6. Дакле потенцијална решења се добијају за $y \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. За назначене вредности броја y, променљива $x^2 \in \{4, 16, 7, 13, 8, 12, 9, 11\}$. Како 7, 13, 8, 12, и 11 нису квадрати целог броја то једначина има 6 целобројних решења и то: (2, 1) ; (-2, 1) ; (4, -1) ;(-4, -1) ; (3, 6) ; (-3, 6). Према томе дата једначина има коначно много решења. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

60. Одредити све природне бројеве x и y тако да задовољавају једначину $99x + 2y = 202$.

61. Доказати да једначина $15x + 40y = 2006$ нема решења у скупу природних бројева.

62. Колико решења има једначина $x + y = 2006$, ако су x и y природни бројеви?

63. Колико решења има једначина $x \cdot y = 96$, ако су x и y природни бројеви?

64. Одредити сва целобројна решења једначине $x^2 \cdot y = 48$.

65. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^2 \cdot y^3 = 72$?

66. Колико решења има једначина $\frac{x}{4} = \frac{5}{y}$, ако су x и y природни бројеви?

67. Одредити сва решења једначине $\frac{x}{3} = \frac{y}{8}$, ако су x и y цели бројеви.

68. Да ли једначина $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4$ има решења у скупу целих бројева?

69. Колико целобројних решења има једначина $|x| + |y| = 10$?

70. Одредити сва целобројна решења једначине $xy + 28 = 0$.

71. Решити једначину $x^2 + |y| = 17$, ако су x и y цели бројеви.

72. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $3x + 39y = 2000$?

73. Одредити сва решења једначине $x^2 \cdot y = 36$ у скупу целих бројева.

74. Одредити сва целобројна решења једначине $x^2 \cdot y^3 = 108$.

75. Колико решења има једначина $x \cdot y \cdot z = 6$, ако су x, y и z цели бројеви?

76. Колико решења има једначина $\frac{xz}{9} = \frac{2}{y}$, ако су x, y и z природни бројеви?

77. Колико решења има једначина $x + y + z = 6$, ако су x, y и z природни бројеви, а колико, ако су x, y и z ненегативни цели бројеви?

78. Одредити све природне бројеве x и y тако да је $x + \frac{2}{y} = 3$.

79. Одредити све уређене парове (x, y) целих бројева x и y тако да је $x^2 + \frac{4}{y^2} = 5$.

80. Одредити природне бројеве x и y тако да је $\frac{19}{x} + \frac{99}{y} = 109$.

81. Одредити све природне бројеве x и y тако да је: a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$; b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$; c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$.

82. Одредити све природне бројеве n за које једначина $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = n$ има решења у скупу природних бројева.

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

83. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $\frac{x}{2} + \frac{3}{y} = 4$?

84. Одредити све природне бројеве x и y тако да је $\frac{8}{x} + \frac{9}{y} = 5$.

85. Дата је једначина $\frac{2005}{x} + \frac{2006}{y} = 2007$. Колико решења има дата једначина, ако су x и y природни бројеви.

86. Дата је једначина $x + y + z = к$ (к је природан број већи од 2). Колико решења има дата једначина ако су x, y и z природни бројеви, а колико, ако су ненегативни цели бројеви?

87. Да ли се сваки природан број к може приказати као збир два проста броја p и q?

88. Да ли се сваки природан број к може приказати као разлика два проста броја p и q?

2.4. НЕКЕ ПРИМЕНЕ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА

Елементарне Диофантове једначине имају и своју примену. Ево неких, најзанимљивијих примера примене у којима прво треба проблем превести са обичног, на математички језик, а потом добијену Диофантову једначину решити.

ПРИМЕР 11: Мерни број ивице коцке је природан број. Може ли мерни број њене површине бити 300?.

РЕШЕЊЕ: Нека је мерни број ивице коцке a. Тада је површина коцке $6a^2 = 300$, па је $a^2 = 50$. Како не постоји природан број чији је квадрат 50, то таква коцка не постоји. Δ

ПРИМЕР 12: Дат је производ $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11 = 399*6***$. Не вршећи множење у добијеном броју уместо звездица написати одговарајуће цифре.

РЕШЕЊЕ: Нека је добијени број $\overline{399a6bcd}$. Дати производ је дељив са $2\cdot5\cdot10 = 100$, па су последње две цифре c и d добијеног броја нуле. Број је дељив са 9, па збир цифара добијеног броја 27 + a + b такође мора бити дељив са 9, што значи да је и збир a + b једнак 0, 9 или 18. Број је дељив и са 11 па је разлика (3 + 9 + 6) - (9 + a + b) = 9 – a – b дељива са 11, што значи да је a + b = 9. Због дељивости са 4, цифра b је 0, 4 или 8. Ка како је 399 дељиво са 7, то мора бити и број a6b, што значи да је a6b или 960, или 564 или 168. Како је само 168 дељиво са 7, тражени број је 39916800. Δ

ПРИМЕР 13: Одредити најмањи и највећи осмоцифрени број који има збир цифара 40? О којим бројевима је реч ако све цифре морају бити различите?

РЕШЕЊЕ: Ако се цифре могу понављати најмањи такав број је 10039999, а највећи 99994000.

Како све цифре морају бити различите, како је збир свих десет цифара 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 0 = 45 и како се прави осмоцифрен број, то значи да из збира морају изостати цифре чији је збир 45 – 40 = 5.

Дакле 0 + 5, 1 + 4 или 2 + 3. Ако се прави најмањи, али и највећи број изостаће 2 и 3, а добиће се бројеви 10456789, односно 98765410. Δ

<u>ПРИМЕР 14:</u> Одредити најмањи и највећи природан број чије су све цифре различите, ако је производ цифара тог броја 720.

РЕШЕЊЕ: Најмањи број је онај који се може направити са што мање цифара. Како је $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, то најмањи број не може бити троцифрен, јер се ни 5 ни 9 не могу комбиновати са 2. Према томе најмањи такав број је 2589.

Највећи број је онај који има што више цифара, а такав је број чије су цифре 1, 2, 3, $2 \cdot 2$, 5, $2 \cdot 3$, дакле број 654321. Напомена: Нула се не сме ставити на крај броја, јер би тада производ цифара био 0, а не 720. Δ

<u>ПРИМЕР 15:</u> Постоји ли двоцифрен број који је једнак збиру своје цифре десетица и квадрата цифре јединица?

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени двоцифрени природни број $\overline{xy}$. Тада је $10x + y = x + y^2$. Дакле $9x = y^2 - y = y(y-1)$. Како су бројеви y и $y-1$ узастопни, они су и узајамно прости, што значи да немају заједничких делилаца. Пошто је лева страна једнакости дељива са 9 то је са 9 дељив или број y или $y - 1$. Дакле или је $y = 9$ или је $y - 1 = 9$, односно $y = 10$. Други случај отпада, па остаје само вредност $y = 9$. Тада је $9x = y(y - 1) = 9 \cdot 8$, што значи да је $x = 8$. Тражени двоцифрени број је $89 = 8 + 9^2$. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

89. Одредити три природна броја чији је збир једнак њиховом производу.

90. Постоји ли десет природних бројева таквих да је њихов збир једнак њиховом производу и једнак броју 20?

91. Збир к природних бројева једнак је њиховом производу и једнак је 2007. Одредити најмањи и највећи такав број к?

92. Мерни број ивице коцке је природан број. Може ли површина коцке бити 1234?

93. Може ли запремина коцке, чији је мерни број ивице природан број, бити 432?

94. Постоји ли квадар чија је површина 987654321 ако су мерни бројеви његових ивица природни бројеви?

95. Колико има седмоцифрених бројева чији је збир цифара 3.

96. Колико има петоцифрених бројева који имају збир цифара 43.

97. Постоји ли природан број чији је производ цифара једнак 2000? Одредити најмањи такав природан број.

98. Постоји ли четвороцифрени природан број чији је производ цифара једнак 3360?

99. Колико има петоцифрених бројева чији је производ цифара 0?

100. Колико има троцифрених бројева чији је производ цифара 144?

101. Колико има троцифрених бројева чији је збир цифара 5?

102. Колико најмање и највише цифара може имати природан број чији је производ цифара 512?

103. Колико има четвороцифрених природних бројева чији је производ цифара 360?

104. Природан број n^6 записује се цифрама 2, 4, 5, 8, 8, 9, 9. Одредити природан број n.

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

105. Постоји ли троцифрен број који је једнак збиру своје цифре јединица, квадрата цифре десетица и куба цифре стотина?

106. Одредити најмањи дестоцифрени број за који важи: прва цифра једнака је броју јединица у декадном запису, друга броју двојки, трећа броју тројки, ..., девета броју деветки и десета броју нула у декадном запису тог броја.

107. Очигледно је: $4 = 2\cdot2 = 2+2$, $6 = 1\cdot2\cdot3 = 1+2+3$, $8 = 1\cdot1\cdot2\cdot4 = 1+1+2+4$, $9 = 1\cdot1\cdot1\cdot3\cdot3 = 1+1+1+3+3$, ...Испитати да ли се сваки сложен број s може приказати у облику производа неколико природних бројева чији је збир такође s.

108. На колико се начина сума од 100 динара може исплатити новчаницама од 1, 2 и 5 динара?